

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**Etapă locală - 26. 02. 2017****Clasa a VIII- a****Problema 1**

Se consideră fracția $F = \frac{7^{2n} + 7^{n+1} + 10}{6 \cdot 7^{n+12}}$, unde n este număr natural.

- a) Arătați că $F = \frac{7^{n+5}}{6}$ și F este număr natural;
- b) Determinați valorile lui n pentru care F se divide cu 3.

Problema 2

Pentru orice număr natural $n \geq 2$ notăm

$$S_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \frac{1}{n^2 + 3} + \dots + \frac{1}{n^2 + n}$$

- a) Arătați că: $\frac{1}{n+1} < S_n < \frac{1}{n}$, pentru orice $n \geq 2$
- b) Calculați partea întreagă a numărului: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{S_{20}} + \frac{1}{S_{16}} \right)$.

Problema 3

Pătratul ABCD și dreptunghiul AEFD sunt în plane diferite cu $DE \perp AB$. Știind că $CD=1\text{cm}$, $ED=\sqrt{3}\text{ cm}$ să se calculeze :

- a) $d(E, FC)$;
- b) $d(B, DE)$;

Problema 4

Pe planul triunghiului echilateral ABC se duc, în vârfuri, perpendicularele AA_1 , BB_1 , CC_1 încât A_1 , B_1 să fie de o parte a planului (ABC), iar C_1 de partea opusă, $AA_1=3a$, $BB_1=CC_1=AB=a$. Se cere :

- a) Arătați că $MN \perp AC$, unde $BC \cap B_1C_1 = \{M\}$, $AC \cap A_1C_1 = \{N\}$.
- b) Arătați că $MN \perp (ACA_1)$.
- c) Calculați $d(A, (A_1B_1C_1))$.

1 Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

2 Toate problemele sunt obligatorii;

3 Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.